Mathematische Fingerübungen

Georg Sedlitz

Mathematik besteht nicht nur aus Zahlen. Man könnte allgemeiner sagen, sie ist die Wissenschaft der Strukturen. Dass interessante und anspruchsvolle Mathematik auch ohne Fachwissen oder großartiges Rechnen möglich ist, will ich mit ein paar Kostproben demonstrieren: Beispiele, über die sich Studenten der technischen Mathematik an der TU Wien in ihrer Freizeit mit Vergnügen den Kopf zerbrechen. Viel Spaß!

Zündschnüre

Ein Minenarbeiter wird in einer 3/4 Stunde von seinem Kollegen abgelöst werden. Er hat nichts zu tun und 2 lange Zündschnüre. Er will durch Abbrennen der Zündschnüre diese 3/4 Stunde genau messen, um seinem Kollegen pünktlich entgegengehen zu können. Eine Uhr hat er leider nicht. Die beiden Zündschnüre brennen jeweils genau eine Stunde. Jedoch handelt es sich um ein minderwertiges Fabrikat, deshalb brennt die Zündschnur nicht gleichmäßig ab. Gleich lange Stücke der Schnur verbrennen nicht unbedingt in gleicher Zeit. Der Minenarbeiter weiß nur sicher, dass jede Schnur insgesamt eine Stunde lang brennt.

Kann er es schaffen, die 3/4 Stunde genau zu messen?

Hüte und Wahrscheinlichkeiten

Drei Teilnehmer betreten für dieses Spiel einen Raum. Nun wird jedem entweder ein roter oder ein blauer Hut aufgesetzt. Dies wird per Münzwurf entschieden. Jeder kann die Hüte der beiden anderen sehen, seinen eigenen aber nicht. Jegliche Kommunikation untereinander ist nun untersagt. Nachdem alle Teilnehmer die Hüte der anderen gesehen haben, müssen sie auf ein Signal gleichzeitig einen Tipp abgeben. Ziel ist es, die Farbe des eigenen Hutes zu erraten. Sie können "rot", "blau" oder gar nichts sagen. Die Teilnehmer teilen sich ein Preisgeld von 3 Millionen Euro, wenn sie es schaffen, dass mindestens einer richtig und keiner falsch tippt. Bevor sie den Raum betreten, dürfen sie sich eine Taktik ausmachen, um die Wahrscheinlichkeit, dass sie gewinnen, zu maximieren.

Wie sollen sie vorgehen? Wie sollten sie ihre Taktik ändern, wenn es egal wäre, wenn jemand falsch tippt?

Ein seltsamer Raum

Sie werden in einem Raum mit quadratischem Grundriss gegen Ihren Willen festgehalten. Ihre Augen sind verbunden und Sie hören eine Lautsprecher-Stimme, die aus keiner bestimmten Richtung zu kommen scheint. Die Stimme teilt Ihnen folgendes mit:

In diesem Raum liegen 4 Münzen, in jeder Ecke eine. Diese Münzen dürfen ihren Platz zwar nicht verlassen, jedoch können sie umgedreht werden. Jede Münze hat 2 Seiten, Kopf und Zahl. (Ohne die Münzen tatsächlich zu sehen, ist es unmöglich, zu bestimmen, welche Seite „Kopf" und welche „Zahl" zeigt.) Es ist nicht bekannt, wie die Münzen anfangs liegen. Ihr Ziel ist es, alle Münzen so zu drehen, dass sie „Zahl" zeigen. Wenn Ihnen das gelingt, werden Sie freigelassen.

Sie können nun beliebige Münzen umdrehen. Dann begeben Sie sich in die Mitte des Raumes und fragen, ob die Münzen richtig liegen. Liegen die Münzen tatsächlich richtig, sind sie frei. Liegen sie nicht alle richtig, dreht sich der Raum um Sie herum, Sie verlieren komplett die Orientierung und müssen weiter probieren.

Wie kann man mit endlich vielen Versuchen mit Sicherheit erreichen, dass alle Münzen richtig liegen? Was ist die kleinste Anzahl an Zügen, die man dafür benötigt?

Zwerge und Hüte

100 Zwerge sind in einer Höhle gefangen. Ein böses, hungriges Monster, das dort haust, hat sich folgendes hinterhältige Spiel für sie ausgedacht:

Jeder Zwerg bekommt zufällig einen Hut aufgesetzt. Die Hüte sind entweder rot oder blau, die Zwerge wissen aber nicht, wie häufig die jeweiligen Farben auftreten. Hat jeder einen Hut auf, können sie sich frei in der Höhle bewegen und müssen es schaffen, sich nach Hutfarbe zu sortieren. Dabei dürfen sie jedoch kein Wort miteinander reden und sich auch sonst keine Zeichen geben oder in irgendeiner Art und Weise miteinander kommunizieren. Sie sehen aber nur die Hüte der anderen Zwerge, nicht den eigenen.

Das Monster verspricht ihnen die Freiheit, wenn die Zwerge es schaffen, sich zu sortieren.

Gelingt es nicht, dann werden sie alle gefressen.

Wie schaffen die Zwerge es, sich nach Hutfarbe geordnet aufzustellen?

Noch mehr Zwerge und Hüte

Außer sich vor Zorn über die klugen Zwerge, die es geschafft haben, sich zu ordnen, stellt das Monster ihnen erneut eine Aufgabe, anstatt ihnen die Freiheit zu schenken:

Die Zwerge müssen sich nun hintereinander aufstellen und dürfen sich nicht mehr bewegen. Der hinterste Zwerg sieht alle 99 Zwerge vor sich, sein Vordermann sieht 98 usw. Der vorderste Zwerg sieht niemanden mehr. Jeder Zwerg bekommt jetzt wieder einen Hut aufgesetzt, der, wie zuvor, entweder rot oder blau ist. Die Farben der Hüte sind komplett zufällig. Die Zwerge müssen nun ihre eigene Hutfarbe erraten. Der hinterste Zwerg muss beginnen und sagt entweder „rot" oder „blau". Dann kommt sein Vordermann dran und rät. Das wird fortgesetzt, bis alle 100 Zwerge ihren Tipp abgegeben haben. Die anderen Zwerge dürfen währenddessen nicht sprechen oder sich Zeichen geben, sie dürfen auch nichts anderes tippen, als „rot" oder „blau". Das Monster wird anschließend alle Zwerge fressen, die nicht ihre Hutfarbe erraten haben. Alle übrigen werden nun wirklich in die Freiheit entlassen (Versprochen!).

Die Zwerge dürfen sich vor dieser Aufgabe treffen, um sich abzusprechen. Bei dieser Besprechung schlägt ein Zwerg folgende Taktik vor: Der hinterste Zwerg soll die Farbe des Vordermanns sagen und dieser sagt sie einfach nach. Der nächste Zwerg tippt wieder die Farbe des Vordermanns usw. Bei dieser Taktik überleben mindestens 50 Zwerge, die anderen überleben nur vielleicht. Die Zwerge sind ganz zufrieden mit diesem Vorgehen, doch dann behauptet ein anderer Zwerg, er habe eine Strategie gefunden, mit der mindestens 99 Zwerge überleben werden.

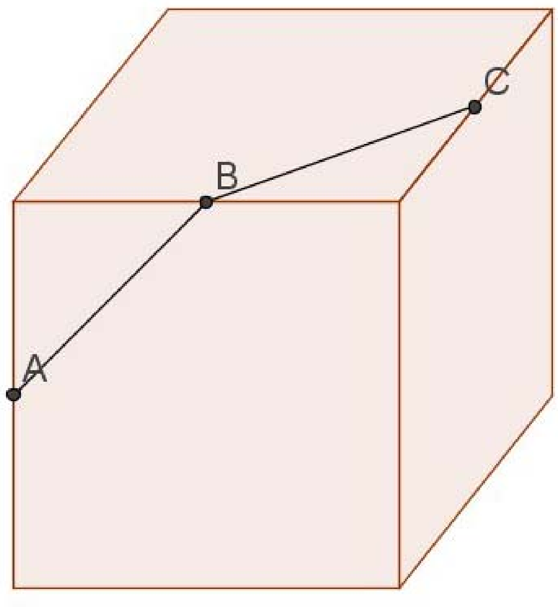
Wie stellt er das an?

Ein Würfel

Zu sehen sind ein Würfel und 3 Punkte, die jeweils eine Kante halbieren.

Vor dieser Skizze sitzt ein Mathematiker und macht sich gerade daran, auszurechnen, wie groß denn der Winkel „ABC", der von den Punkten A, B und C gebildet wird, sei. Da betritt sein Sohn das Zimmer und blickt seinem Vater neugierig über die Schulter. Nach wenigen Sekunden nennt er die Größe des von den 3 Punkten gebildeten Winkels. Der Mathematiker ist verblüfft, rechnet nach und kommt auf dasselbe Ergebnis. Er kann es nicht recht glauben, denn der Knabe hat keine Ahnung von Vektoren und Winkelfunktionen. (Zu den wenigen Dingen, die er in der Schule über Winkel gehört hat, zählt die Winkelsumme in einem Dreieck.)

Wie ist der Sohn des Mathematikers auf die Lösung gekommen?



Mathematische Fingerübungen-Lösungen

GeorgSedlitz

Zündschnüre

Ja, es ist möglich. Dazu muss er gleichzeitig drei Enden der zwei Zündschnüre anzünden. Die Schnur, mit den beiden brennenden Enden, ist nach exakt einer halben Stunde verbrannt. Folglich würde das Stück, das von der anderen Schnur noch übrig ist, noch eine weitere halbe Stunde brennen. Zu diesem Zeitpunkt muss der Minenarbeiter auch bei dieser Zündschnur das zweite Ende entzünden, um wieder die Brenndauer zu halbieren. Das Stück brennt also noch eine 1/4 Stunde. Insgesamt dauert das Verbrennen in Summe nun eine 3/4 Stunde.

Hüte und Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Teilnehmer die gleiche Hutfarbe haben, beträgt genau 25%. Andernfalls haben nur zwei die gleiche Hutfarbe und einer eine andere. Ihre Taktik lautet dann: Jeder, der zwei verschiedene Hutfarben bei den anderen 2 Teilnehmern sieht, sagt gar nichts. Sieht ein Teilnehmer jedoch 2 gleiche Hutfarben, so sagt er die jeweils andere Farbe.

Somit liegt die Gewinnwahrscheinlichkeit bei 75%.

Wenn es egal wäre, wenn jemand die falsche Farbe sagt, so sollte jeder zum Beispiel die Hutfarbe des linken Nachbarn ansagen. Wenn nämlich eine ungerade Anzahl an Leuten, mit roten oder blauen Hüten am Kopf, im Kreis sitzt, so kann man garantieren, dass es zwei benachbarte Leute gibt mit gleicher Hutfarbe.

Ein seltsamer Raum

Zuerst überlegen wir uns die Situation mit nur 2 Münzen (die nach jedem Mal fragen wieder zufällig vertauscht werden). Zuerst dreht man gar keine Münzen um, sondern fragt, ob die Münzen schon richtig liegen. Wenn nicht, dreht man beide um und fragt. Wenn es noch immer nicht passt, müssen die Münzen unterschiedliche Seiten zeigen. Also dreht man eine einzige Münze um. Dann zeigen beide Münzen sicher die gleiche Seite. Zeigen beide noch immer nicht Zahl, dann dreht man einfach beide Münzen um und ist spätestens jetzt fertig. In Kurzschreibweise die Anleitung: 0-2-1-2

Jetzt das Ganze mit 4 Münzen:

Die Positionen der Münzen ändern sich zwar, und können nicht verfolgt werden. Die Münzen, die sich diagonal gegenüber liegen bleiben aber immer gleich. Wir betrachten im Folgenden diese 2 „Diagonalen", die aus je 2 Münzen bestehen.

Man hat also zwei Möglichkeiten, zwei Münzen umzudrehen: entweder zwei benachbarte, oder zwei gegenüberliegende.

In Kurzschreibweise 2N für 2 Nachbarmünzen und 2D für 2 Münzen die diagonal gegenüber liegen. Außerdem kann man alle 4 Münzen umdrehen (4) oder nur eine einzige (1). 3 Münzen ergeben sich aus 4-1.

Wir nehmen an, dass in jeder Diagonale die beiden Münzen die gleiche Seite zeigen und verfahren wie beim 2-Münzen-Problem.

0-4-2D-4 Wenn das nicht funktioniert, könnte es sein, dass in jeder Diagonale die beiden Münzen unterschiedliche Seiten zeigen. Das kann man leicht beheben mit 2N. Wenn der Verdacht richtig war, so liegen nun die Münzen in einer Diagonale mit gleichen Seiten nach oben. es löst also wieder 4-2D-4. Man beachte, dass 4 und 2D die Zustände „gleich" oder „ungleich" in einer Diagonale nicht verändern! Falls man an dieser Stelle noch immer nicht fertig ist, muss man annehmen, dass eine Diagonale zwei gleiche Seiten zeigt und die andere Diagonale nicht. Also dreht man eine einzige Münze um. Danach sind entweder beide Diagonalen „gleich" oder beide „ungleich". Für den ersten Fall löst wieder 4-2D-4. Funktioniert das nicht, so weiß man jetzt mit Sicherheit, dass jede Diagonale 2 Münzen mit ungleichen Oberseiten enthält. Also löst jetzt 2N-4-2D-4. Insgesamt lautet die Anleitung, um die Münzen richtig zu drehen:

0-4-2D-4 - 2N-4-2D-4 - 1-4-2D-4 - 2N-4-2D-4

Egal, wie viel Pech man auch hat: Nach spätestens 16 Mal Fragen hat man alle Münzen auf „Zahl" gedreht. Das ist auch exakt die Anzahl der möglichen Konstellationen, die bei 4 Münzen auftreten können. Es kann also auch keine bessere Strategie geben.

Zwerge und Hüte

Zwei Zwerge machen den Anfang und stellen sich nebeneinander. Die anderen Zwerge stellen sich einfach nacheinander zu ihnen dazu. Das macht jeder Zwerg folgendermaßen: Stehen in der aktuellen Zwergenreihe nur Zwerge mit gleicher Hutfarbe, so stellt er sich einfach dazu (egal auf welche Seite). Gibt es in der Reihe aber Zwerge mit unterschiedlichen Hutfarben, so stellt er sich genau zwischen die 2 benachbarten Zwerge, die verschiedenfarbige Hüte tragen. Mit diesem System stehen am Schluss alle Zwerge mit rotem Hut nebeneinander, daneben die mit blauem Hut.

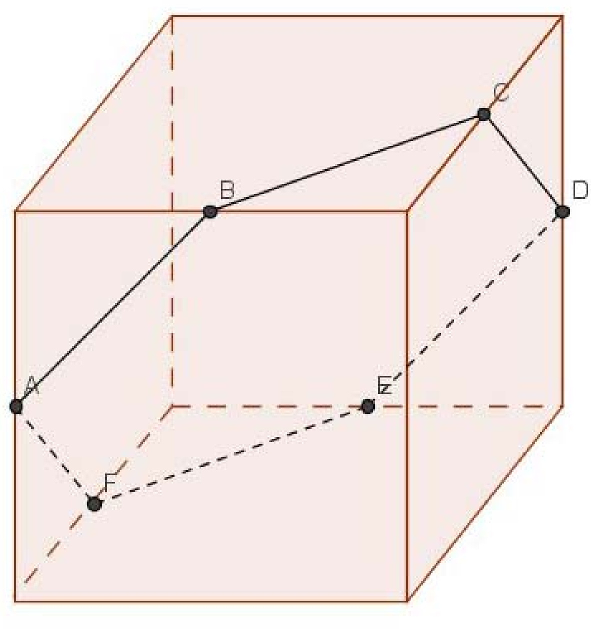
Noch mehr Zwerge und Hüte

Der einzige Zwerg, der nicht sicher überleben wird, ist der, der als erster seine Hutfarbe raten muss. Er hat nämlich gar keine Information über den Hut auf seinem Kopf. Dieser Zwerg kann allen anderen aber mit seinem Tipp eine entscheidende Information geben. Die Zwerge könnten sich z.B. folgendes ausmachen:

Ist die Anzahl der roten Hüte, die der hinterste Zwerg sieht, eine gerade Zahl, so sagt er „rot". Ist die Anzahl der roten Hüte die er sieht aber ungerade, so ist sein Tipp „blau". Auch sein Vordermann zählt die roten Hüte, die er sieht. Kommt er zu demselben Ergebnis (gerade oder ungerade) wie der hinterste Zwerg, muss er einen blauen Hut tragen. Bei einem anderen Ergebnis kann er sicher sein, dass sein Hut rot ist. Die anderen Zwerge hören natürlich alle aufmerksam zu, um die roten Hüte hinter ihnen mitzuzählen. Jeder, der einen Tipp abgeben muss, zählt einfach die bisher angesagten roten Hüte zu denen, die er vor sich sieht, und vergleicht das Ergebnis mit dem, des hintersten Zwerges. So überleben 99 Zwerge (alle bis auf den hintersten) mit Sicherheit.

Ein Würfel

Setzt man das Halbieren der Kanten in diesem Muster fort und verbindet dann die Halbierungspunkte, so entsteht ein regelmäßiges Sechseck. (Man könnte dieses Sechseck auch als Schnittfläche ansehen.) Für den Buben war es nun nicht mehr schwer, den Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks zu berechnen. Dazu zerlegt er das Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke und sieht, dass der Innenwinkel 120 Grad groß ist. (Allgemein: Der Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks beträgt 180-360/n Grad. Auch mit dieser Formel kommt man auf dasselbe Ergebnis.)



METATHEMEN