Mathematische Fingerübungen-Lösungen

GeorgSedlitz

Zündschnüre

Ja, es ist möglich. Dazu muss er gleichzeitig drei Enden der zwei Zündschnüre anzünden. Die Schnur, mit den beiden brennenden Enden, ist nach exakt einer halben Stunde verbrannt. Folglich würde das Stück, das von der anderen Schnur noch übrig ist, noch eine weitere halbe Stunde brennen. Zu diesem Zeitpunkt muss der Minenarbeiter auch bei dieser Zündschnur das zweite Ende entzünden, um wieder die Brenndauer zu halbieren. Das Stück brennt also noch eine 1/4 Stunde. Insgesamt dauert das Verbrennen in Summe nun eine 3/4 Stunde.

Hüte und Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Teilnehmer die gleiche Hutfarbe haben, beträgt genau 25%. Andernfalls haben nur zwei die gleiche Hutfarbe und einer eine andere. Ihre Taktik lautet dann: Jeder, der zwei verschiedene Hutfarben bei den anderen 2 Teilnehmern sieht, sagt gar nichts. Sieht ein Teilnehmer jedoch 2 gleiche Hutfarben, so sagt er die jeweils andere Farbe.

Somit liegt die Gewinnwahrscheinlichkeit bei 75%.

Wenn es egal wäre, wenn jemand die falsche Farbe sagt, so sollte jeder zum Beispiel die Hutfarbe des linken Nachbarn ansagen. Wenn nämlich eine ungerade Anzahl an Leuten, mit roten oder blauen Hüten am Kopf, im Kreis sitzt, so kann man garantieren, dass es zwei benachbarte Leute gibt mit gleicher Hutfarbe.

Ein seltsamer Raum

Zuerst überlegen wir uns die Situation mit nur 2 Münzen (die nach jedem Mal fragen wieder zufällig vertauscht werden). Zuerst dreht man gar keine Münzen um, sondern fragt, ob die Münzen schon richtig liegen. Wenn nicht, dreht man beide um und fragt. Wenn es noch immer nicht passt, müssen die Münzen unterschiedliche Seiten zeigen. Also dreht man eine einzige Münze um. Dann zeigen beide Münzen sicher die gleiche Seite. Zeigen beide noch immer nicht Zahl, dann dreht man einfach beide Münzen um und ist spätestens jetzt fertig. In Kurzschreibweise die Anleitung: 0-2-1-2

Jetzt das Ganze mit 4 Münzen:

Die Positionen der Münzen ändern sich zwar, und können nicht verfolgt werden. Die Münzen, die sich diagonal gegenüber liegen bleiben aber immer gleich. Wir betrachten im Folgenden diese 2 „Diagonalen", die aus je 2 Münzen bestehen.

Man hat also zwei Möglichkeiten, zwei Münzen umzudrehen: entweder zwei benachbarte, oder zwei gegenüberliegende.

In Kurzschreibweise 2N für 2 Nachbarmünzen und 2D für 2 Münzen die diagonal gegenüber liegen. Außerdem kann man alle 4 Münzen umdrehen (4) oder nur eine einzige (1). 3 Münzen ergeben sich aus 4-1.

Wir nehmen an, dass in jeder Diagonale die beiden Münzen die gleiche Seite zeigen und verfahren wie beim 2-Münzen-Problem.

0-4-2D-4 Wenn das nicht funktioniert, könnte es sein, dass in jeder Diagonale die beiden Münzen unterschiedliche Seiten zeigen. Das kann man leicht beheben mit 2N. Wenn der Verdacht richtig war, so liegen nun die Münzen in einer Diagonale mit gleichen Seiten nach oben. es löst also wieder 4-2D-4. Man beachte, dass 4 und 2D die Zustände „gleich" oder „ungleich" in einer Diagonale nicht verändern! Falls man an dieser Stelle noch immer nicht fertig ist, muss man annehmen, dass eine Diagonale zwei gleiche Seiten zeigt und die andere Diagonale nicht. Also dreht man eine einzige Münze um. Danach sind entweder beide Diagonalen „gleich" oder beide „ungleich". Für den ersten Fall löst wieder 4-2D-4. Funktioniert das nicht, so weiß man jetzt mit Sicherheit, dass jede Diagonale 2 Münzen mit ungleichen Oberseiten enthält. Also löst jetzt 2N-4-2D-4. Insgesamt lautet die Anleitung, um die Münzen richtig zu drehen:

0-4-2D-4 - 2N-4-2D-4 - 1-4-2D-4 - 2N-4-2D-4

Egal, wie viel Pech man auch hat: Nach spätestens 16 Mal Fragen hat man alle Münzen auf „Zahl" gedreht. Das ist auch exakt die Anzahl der möglichen Konstellationen, die bei 4 Münzen auftreten können. Es kann also auch keine bessere Strategie geben.

Zwerge und Hüte

Zwei Zwerge machen den Anfang und stellen sich nebeneinander. Die anderen Zwerge stellen sich einfach nacheinander zu ihnen dazu. Das macht jeder Zwerg folgendermaßen: Stehen in der aktuellen Zwergenreihe nur Zwerge mit gleicher Hutfarbe, so stellt er sich einfach dazu (egal auf welche Seite). Gibt es in der Reihe aber Zwerge mit unterschiedlichen Hutfarben, so stellt er sich genau zwischen die 2 benachbarten Zwerge, die verschiedenfarbige Hüte tragen. Mit diesem System stehen am Schluss alle Zwerge mit rotem Hut nebeneinander, daneben die mit blauem Hut.

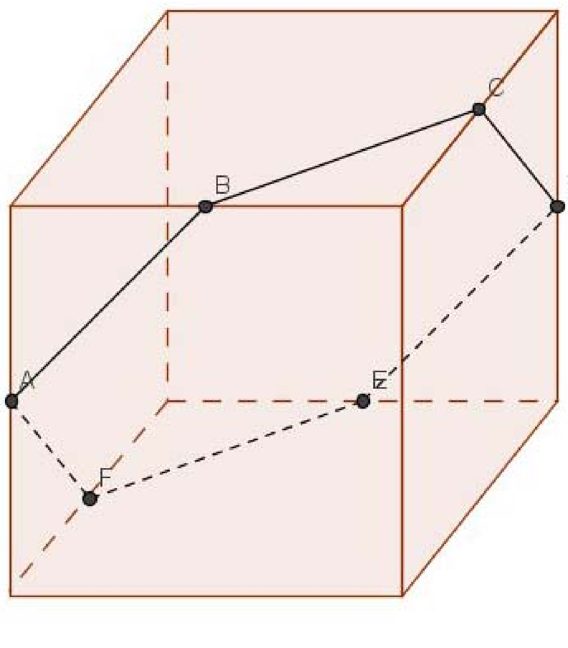
Noch mehr Zwerge und Hüte

Der einzige Zwerg, der nicht sicher überleben wird, ist der, der als erster seine Hutfarbe raten muss. Er hat nämlich gar keine Information über den Hut auf seinem Kopf. Dieser Zwerg kann allen anderen aber mit seinem Tipp eine entscheidende Information geben. Die Zwerge könnten sich z.B. folgendes ausmachen:

Ist die Anzahl der roten Hüte, die der hinterste Zwerg sieht, eine gerade Zahl, so sagt er „rot". Ist die Anzahl der roten Hüte die er sieht aber ungerade, so ist sein Tipp „blau". Auch sein Vordermann zählt die roten Hüte, die er sieht. Kommt er zu demselben Ergebnis (gerade oder ungerade) wie der hinterste Zwerg, muss er einen blauen Hut tragen. Bei einem anderen Ergebnis kann er sicher sein, dass sein Hut rot ist. Die anderen Zwerge hören natürlich alle aufmerksam zu, um die roten Hüte hinter ihnen mitzuzählen. Jeder, der einen Tipp abgeben muss, zählt einfach die bisher angesagten roten Hüte zu denen, die er vor sich sieht, und vergleicht das Ergebnis mit dem, des hintersten Zwerges. So überleben 99 Zwerge (alle bis auf den hintersten) mit Sicherheit.

Ein Würfel

Setzt man das Halbieren der Kanten in diesem Muster fort und verbindet dann die Halbierungspunkte, so entsteht ein regelmäßiges Sechseck. (Man könnte dieses Sechseck auch als Schnittfläche ansehen.) Für den Buben war es nun nicht mehr schwer, den Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks zu berechnen. Dazu zerlegt er das Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke und sieht, dass der Innenwinkel 120 Grad groß ist. (Allgemein: Der Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks beträgt 180-360/n Grad. Auch mit dieser Formel kommt man auf dasselbe Ergebnis.)



METATHEMEN