Mathematische Fingerübungen—Lösungen

Georg Sedlitz

Münzen abwiegen

Notation:

X...Münze mit unbekanntem Gewicht

R...Münze mit richtigem Gewicht

L...Münze, die möglicherweise leichter als das Soll-Gewicht ist

S...Münze, die möglicherweise schwerer ist

Zuerst legt er vier Münzen auf jede Waagschale und wiegt.

XXXX-XXXX

Fall 1

Die Waage ist im Gleichgewicht. Die fehlerhafte Münze befindet sich sicher unter den übrigen vier Münzen. Von diesen legt er je eine auf jede Schale. X-X Ist die Waage nun im Gleichgewicht, kommen nur mehr zwei Münzen in Frage, ist sie im Ungleichgewicht, kommen nur mehr die beiden Münzen in Frage, die aktuell auf der Waage liegen. In jedem Fall genügt ein dritter Wiegevorgang X-R (bzw. L-R oder S-R), um zu entscheiden, welche Münze fehlerhaft ist.

Fall 2

Die Waage ist nach dem ersten Wiegevorgang im Ungleichgewicht. Nun hat der Angestellte 3 Gruppen von Münzen vier R, vier L und vier S. (Die Waagschale, die beim Wiegen oben war, enthält die L-Münzen, die andere die S-Münzen.) Der zweite Wiegevorgang sieht dann so aus: LSSS-SRRR

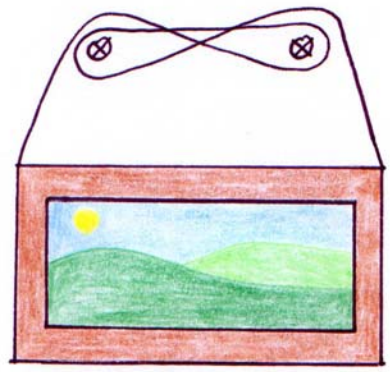
Ist nun die linke Seite schwerer, dann muss die fehlerhafte Münze unter den linken drei S sein. Dann kann der Angestellte S-S wiegen, und ist fertig. Ist hingegen die rechte Seite schwerer, so ist die fehlerhafte Münze entweder die linke L-Münze oder die rechte S-Münze. Auch hier genügt einmal Wiegen (L-R oder S-R), um die gesuchte Münze ausfindig zu machen.

Wenn die Waage nach dem zweiten Mal Wiegen (LSSS-SRRR) allerdings im Gleichgewicht ist, so befindet sich die fehlerhafte Münze unter den drei L-Münzen, die hier gar nicht gewogen wurden. Und wieder reicht ein letztes Mal Wiegen (L-L), um besagte Münze zu finden. (Ist L-L im Gleichgewicht, so ist die fehlerhafte Münze das dritte L, bei Ungleichgewicht ist die gesuchte Münze auf der leichteren Seite zu finden.)

TIPP: Zur Fallunterscheidung ein Baumdiagramm zeichnen hilft bei eventuellen Unklarheiten.

Ein Bild aufhängen

Das Werk des Mathematikers ist hier skizziert. Überlegt man sich kurz, was passiert, wenn man einen Nagel heraus ziehen würde, ist es klar, dass diese Art der Wicklung eine Lösung darstellt. Allerdings ist es nicht die einzige. Um die Lösung und den Weg zu anderen Lösungen besser zu verstehen, bezeichnen wir Wicklungen um den linken Nagel mit „L“, um den rechten Nagel mit „R“. Erfolgt die Wicklung gegen den Uhrzeigersinn, nennen wir sie +R beziehungsweise +L. Erfolgt sie im Uhrzeigersinn, so be-



zeichnen wir sie mit -R oder -L, je nachdem, um welchen Nagel es sich handelt. Verfolgt man die Schnur in der Skizze von der linken bis zur rechten Ecke, so sind die Wicklungen:

-L +R +L -R

Wir erkennen, dass die „Summe“ hier Null ist. Das muss so sein, denn wenn man z.B. den linken Nagel herauszieht, kommt es nur mehr auf die R's an. Diese R-Wicklungen müssen sich vollständig auflösen, also quasi „wegkürzen“. Außerdem treten die Wicklungen +L und -L nicht direkt hintereinander auf. Das entspräche ja einer Wicklung die sich sofort auflösen würde (analog +R, -R). Das sind auch schon die beiden Bedingungen für eine Lösung. So lassen sich beliebig viele Lösungen konstruieren, z.B.: +L +R +R -L -R +L -R -L

Hellsehen

Der Zauberlehrling zieht 5 Karten. Nachdem es nur 4 verschiedene Farben gibt, zieht er mindestens 2 gleichfarbige Karten. Die erste Karte, die er zeigt, ist eine davon. So weiß der Zauberer schon, um welche Farbe es sich bei der verdeckten Karte handelt. Es kommen (für die verdeckte Karte) nur noch 12 Werte in Frage, da die erste Karte dieser Farbe schon offen liegt. Der Zauberlehrling hat nun 6 Möglichkeiten, die übrigen 3 Karten abzulegen:

Die beiden machen sich zuerst eine spezielle „Ordnung“ der einzelnen Farben aus, z.B.: Kreuz < Pik < Herz < Karo. Bei 2 Karten mit der gleichen Farbe entscheidet der Wert darüber, welche nun "am größten ist". Hat er jetzt also 3 Karten, ist eine die niedrigste (N), eine die mittlere (M) und eine die höchste Karte (H). Er kann nun mit den 6 verschiedenen Anordnungen dem Zauberer eine der Zahlen von 1 bis 6 übermitteln. (z.B.: N-M-H entspricht 1; N-H-M entspricht 2; M-N-H entspricht 3 usw.)

Diese Zahl hat der Lehrling so gewählt, dass der Zauberer sie nur mehr zum Wert der ersten Zahl dazu addieren muss, um den Wert der verdeckten Karte zu erhalten (die Farbe kennt er bereits). Dieses „Addieren“ geht auch über die Grenze Ass-2. Bei zwei Karten ist der Abstand der Werte allerhöchstens 6, deshalb funktioniert dieser Trick.

Ein Beispiel: Der Lehrling zieht Karo Dame und Karo 2 und drei weitere Karten. Würde er die 2 als erste Karte wählen und die Dame beiseite legen, so müsste man zu 2 die Zahl 10 addieren, um auf die Dame zu kommen. Also muss der Lehrling stattdessen die Karo 2 beiseite legen. Er zeigt dem Zauberer als erstes die Dame. (Jetzt kennt er die Farbe der verdeckten Karte.) Die 3 anderen Karten legt er in der Ordnung M-N-H, welche der Zahl 3 entspricht (siehe oben). Also zählt der Zauberer von der Dame 3 Schritte weiter: König -> Ass -> 2. Jetzt weiß der Zauberer, dass die verdeckte Karte die Karo 2 ist.

Der Würfelkalender

Wegen dem 11. und 22. im Monat müssen 1 und 2 auf beiden Würfeln vorhanden sein. Das gilt auch für die 0, denn sonst müssten auf dem Würfel, auf dem die 0 nicht abgebildet ist, alle anderen Ziffern vorhanden sein (und das sind mehr als die 6 Seiten des Würfels). Auf jedem Würfel verbleiben noch 3 Seiten, also insgesamt 6 Seiten für die restlichen (7!) Ziffern 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die Lösung: 6 und 9 werden nicht beide benötigt, da man die eine Ziffer aus der anderen durch Rotation des Würfels erhält. Man kann z.B. 4, 5, 6, 7 und 8 beliebig auf die restlichen Seiten verteilen und erhält den fertigen Würfelkalender.

Münzsammlung

Spieler A nummeriert die Münzen anfangs durch. Dann betrachtet er alle Münzen mit gerader Nummer und alle mit ungerader Nummer. Er entscheidet sich für die Gruppe, mit der höheren Gesamtsumme. Sind das z.B. die „ungeraden“, fängt Spieler A an und nimmt die erste Münze (Nummer 1). Spieler B kann sich nun zwischen zwei "geraden" Münzen entscheiden. Darauf nimmt A von der selben Seite wie B und nimmt sich damit wieder eine von den gewünschten "ungeraden" Münzen. Spieler A kann also dafür sorgen, dass B ausschließlich Münzen mit gerader Nummer nimmt. Also: je nachdem welche Gruppe der Münzen mehr wert ist, entscheidet sich A für diese und gewinnt. Sind beide Gruppen gleich viel wert, so kann A immer noch ein Unentschieden erreichen.

Mathematiker-Söhne

Das Produkt des Alters der drei Söhne ist 36. Dies lässt nur 8 verschiedene Möglichkeiten zu:

1-1-36, 1-2-18, 1-3-12, 1-4-9, 1-6-6, 2-2-9, 2-3-6 und 3-3-4. Die Summe der drei Alter ist Carl auch schon bekannt, allerdings reicht ihm das noch nicht. Das heißt, dass zu diesem Zeitpunkt die Lösung für ihn noch nicht eindeutig war. Also muss es mindestens zwei der vorher genannten Möglichkeiten geben, die die gleiche Summe haben. Das ist bei genau zwei davon der Fall. Die Alter 1-6-6 und 2-2-9 ergeben addiert beide 13. (das sind die einzigen Summen, die übereinstimmen) Carl erfährt dann aber, dass es einen ältesten Sohn gibt. Also kann er den Fall 1-6-6 ausschließen. Folglich sind die beiden jüngsten Söhne von Friedrich zwei Jahre alt und der älteste (rothaarige) Sohn schon neun.