Vektoralgebra (Analyt. Geometrie mit DERIVE)

Horst Schwarz, HTBL Wien-10 DSK-372\AMMU.LZH

Mathematische Inhalte:

Vektoralgebra im 3-dimensionalen Raum

Anwendung:

Anwendung der Vektoralgebra (Betrag eines Vektors, Skalarprodukt, Vektorprodukt, vektorielle Darstellung einer Geraden im Raum) auf einfache Dreiecksberechnungen .

Kurzzusammenfassung:

1. Einführung in die Darstellung und Berechnung vonVektoren,Vekorgleichungen, innerem und äußerem Produkt mit Hilfe des Softwarepaketes DERIVE.
2. Anwendung auf einfache, nicht geübte Aufgabenstellungen in Einzelarbeit oder Kleingruppen am PC:
   geg.: die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks im 3-dimensionalen Raum
   ges.: die Länge der Seiten, die Größe der Innenwinkel, die Koordinaten des Höhenschnittpunktes , der Winkel zwischen der Flächennormalen auf die Dreiecksfläche und einem gegebenen Vektor.
3. Vergleich und Diskussion verschiedener Lösungswege, Folgerungen.

Lehrplanbezug:

Höhere Lehranstalt für Maschinenbau und Höhere Lehranstalt für Elektronik:
2. Jg. Vektoralgebra und Berechnung des Dreiecks

Höhere Lehranstalt für Elektrotechnik:
2. Jg.: Vektorrechnung und Berechnung des Dreiecks; 4. Jg.: Vektoralgebra

Anmerkung:

Im Lehrplan der HLA f. Elektrotechnik wird im II. Jahrgang unter Algebra "Vektorrechnung (Skalarprodukt)" angeführt, das Vektorprodukt also in die Vektoralgebra des vierten Jahrgangs verschoben. Dies findet auch in den approbierten Lehrbüchern seinen Niederschlag. Für eine sinnvolle Umsetzung mathemat. Wissens in den theoret. Fachgegenständen ist jedoch dieser Zeitpunkt eindeutig zu spät.

Zeitaufwand:

zweimal 2 aufeinanderfolgende Unterrichtseinheiten

Mediales Umfeld:

verwendete Medien: ein PC mit LCD-Overhead-Display und ein Overheadprojektor zur Diskussion der Ergebnisse, je Arbeitsgruppe ein PC und eine formatierte Arbeitsdiskette
verwendete Software: DERIVE Vers. 2.51 (Generallizenz)
Dateinamen auf der Diskette zu diesem Beitrag:
SW_VEALA.MTH (Demofile der Vektorrechnung mit DERIVE),
SW_VEALB.MTH (Dokumentation des Lösungsweges in DERIVE),

Anmerkungen:

Mathematisches Wissen, das ohne tieferes Verständnis nur für Schularbeiten und Prüfungen **gelernt** worden ist, wird relativ leicht **vergessen**. Das Anwenden mathematischer Kenntnisse beim Lösen **nicht geübter** Aufgabenstellungen trägt wesentlich zu einem tieferen Verständnis bei. Durch den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) wie z. B. DERIVE können auch durchschnittlich motivierte Schüler in vertretbarer Zeit durchaus brauchbare Ergebnisse erzielen, die darüber hinaus mühelos dokumentiert und für die weitere Auswertung auf Diskette gespeichert werden können. Dadurch wird das subjektive Erfolgserlebnis gesteigert und eine objektivere Bewertung möglich. Dort wo es jedoch darum geht, mathematische Standardroutinen für die Anwendung im theoretischen Fachunterricht bereitzustellen, ist DERIVE weniger geeignet. Hier ist der programmierbare Taschenrechner und in zunehmendem Maß der Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen sinnvoller.

1. Vektordarstellung und -berechnungen mit DERIVE:

Vektoren werden in DERIVE als geordnete Liste von Elementen in eckigen Klammern dargestellt:
`oa:=[ax,ay,az], [-3,2,-1].`
Das Skalarprodukt wird durch den (Infix-)Operator "." berechnet:
`a.b, [1,2,3].[3,4,5],`
das Vektorprodukt muß mit der Funktion CROSS berechnet werden:`CROSS(a,b).`
Für nähere Informationen wird auf das DERIVE-Handbuch [1], Seite 133 ff verwiesen .
Um nicht deklarierte Variable (so wie oben `oa:=[ax,ay,az]`*) mit mehr als einem Buchstaben Länge verwenden zu können, muß mit* **OPTION/INPUT/WORD** *auf den WORD-Eingabemodus umgeschaltet werden [1], Seite 42*
Beispiel siehe nächste Seite.

2. Anwendung der Vektoralgebra auf einfache Dreiecksberechnungen im 3-dimensionalen Raum:

Unter der Voraussetzung, daß die Schüler
- mit dem Softwarepakete DERIVE grundlegend umgehen können,
- mit Dreiecksberechnungen in der Ebene vertraut sind und
- die Grundbegriffe der Vektorrechnung und deren Anwendung in DERIVE, wie unter Punkt 1 erläutert, beherrschen,

können eine odere mehrere Aufgaben folgenden Typs gestellt werden, die in Kleingruppen am PC mit Hilfe des Softwarepaketes DERIVE gelöst werden sollen:

geg. sind die Eckpunkte eines Dreiecks
A(4/-3/-3), B(2/4/4), C(-7/-1/1)
ges. sind
a) die Länge der Seiten und
b) die Größe der Innenwinkel
c) die Koordinaten des Höhenschnittpunktes und
d) der Winkel, den der Vektor v=[0,-3,2] mit der Normalen auf die Dreiecksebene einschließt.

Vorstellung AMMU (Schluß)

7) **Programmierbare SHARP-Rechner im Unterricht ("Scharfe Programme")- Teil 2** *(Erich Zott - BASIC-programmierbare Taschenrechner)*: Die 1. und 2.Ableitung wird durch numerisches Differenzieren gebildet; Anwendung bei der Newtonschen Nullstellensuche und bei der Krümmung. Erweiterung der BASIC-Programmsammlung für den 3.Jahrgang.

8) **Black Boxes im Mathematikunterricht** *(Jochen Maaß/Wolfgang Schlögelmann - Didaktikbeitrag)*: Der Didaktikbeitrag kommt diesmal vom mathematischen Institut der Universität Linz und befaßt sich sehr ausführlich mit dem Thema der Black-Box im Mathematikunterricht. Sie finden darin auch einen konkreten Vorschlag zur Aufarbeitung dieses Themas im realen Unterricht. Die Autoren haben dazu ein Spiel gewählt, das den Schülern die Thematik näherbringen soll. ☐

Beispiel einer einführenden Demonstration der Vektorrechnung mit DERIVE:

Protokoll der Berechnung[1]	**erreicht über Menüpunkt** ***Kommentar***
1: v:=[vx,vy,vz]	Author
2: w:=[wx,wy,wz]	Author
3: v:=[1, 1, 1]	Manage/Substitute #1
4: |v|	Author ABS(v)
5: 1.73205	approX #4
6: w:=[1, 0, 0]	Manage/Substitute #2
7: v . w	Author
8: 1	Simplify #7
9: $\mathrm{ACOS}\left[\frac{v.w}{\|v\|.\|w\|}\right]\frac{180}{\pi}$	Author
10: 54.7356	approX #9
11: CROSS(v,w)	Author
12: [0, 1, -1]	Simplify #11

Die vektorielle Darstellung einer Geraden im Raum erfordert beim Einsatz von DERIVE kaum zusätzlichen Erklärungsaufwand, da die Schreibweise analog zu der in den approbierten Lehrbüchern ist. Das Beispiel 2 aus [2] Seite 289 kann mit DERIVE so gelöst werden:

13: "geg.:Gerade g durch P(1/4/-5), r=[2,-1,8] liegt auf g"	
14: "ges.:Parameterdarstellung der Geraden"	
15: p:=[1, 4, -5]	Author *Ortsvektor OP*
16: r:=[2, -1, 8]	Author
17: x := p + μ r	Author
18: [2 μ +1, 4 - μ,8 μ - 5]	Expand #17 (alle Variable) *liefert die gesuchte Komponenten-Darstellung*

Didaktische und methodische Hinweise:
Das Lösen nicht geübter Aufgaben mit einem im bisherigen Mathematikunterricht neuem Medium ist meist mit Ratlosigkeit und Unruhe verbunden. Man sollte diese an und für sich "positiven emotionalen Kräfte" durch geeignete Maßnahmen als "Antriebsenergie" zur Lösung der Aufgabe nutzen, etwa dadurch, daß der/die unterrichtende Lehrer(in)

- je nach Bedarf der Klasse Hinweise für die ersten Lösungsschritte gibt (z.B. "ein Dreieck kann als geschlossenes Vektorpolygon gesehen werden") und kurz die sich daraus ergebenden Lösungsvorschläge in einer Art "brain-storming" sammelt,
- für vorhersehbare Probleme (z.B. der Lösung eines linearen Gleichungssystems von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten mit DERIVE) bereits schriftliche Hinweise vorbereitet, die er/sie dann der jeweiligen Gruppe geben kann und dadurch wieder für die "Betreung aller Gruppen" frei wird.
- Jene Kolleg(inn)en, die mit der Bedienung der "Hardware" nicht so vertraut sind, sollen dafür sorgen, daß zumindest zu Beginn ein(e) EDV-Versierte(r) "zur Hand ist".

Von den verschiedenen Möglichkeiten, die Geradengleichungen der Dreieckshöhen aufzustellen werden im anschließend aufgelisteten Dokumentationsfile zwei behandelt:

a)Normale auf die Dreiecksseite über das Vektorprodukt:

Hier wird die Eigenschaft von a × (a × c) genutzt, in der Dreiecksebene zu liegen und normal auf die Seite a zu stehen (#49), gleichzeitig erhält man den Vektor der Flächennormalen für die letzte Teilaufgabe (#74).

b)Normale auf die Dreiecksseite ohne Vektorprodukt:

Hier wird der Vektor vom Eckpunkt A zum gegenüberliegenden Fußpunkt der Höhe auf die Seite a über trigonometrische Beziehungen der ebenen Geometrie aufgestellt (#93):

$$\vec{na} = \vec{c} + \vec{a}\,\frac{|\vec{c}|\cos(\beta)}{|\vec{a}|}$$

Es muß jedoch für die letzte Teilaufgabe der Normalvektor auf die Dreiecksebene (über ein Vektorprodukt) berechnet werden.

Die Vorteile des Lösungsweges über das Vektorprodukt werden also bei vollständiger Lösung der gestellten Aufgabe unmittelbar einsichtig, eine ausführliche "mathematische Aufbereitung" ist aber insbesonders auch im Hinblick auf weitere Aufgabenstellungen wie z. B. die Berechnung des Normalabstandes eines Punktes von der (Dreiecks-)Ebene nötig (Punkt 3):

[1] Die folgenden berechnungen finden Sie auf der Diskette unter dem dateinamen SW_VEALA.MTH (DERIVE-Format)

Lösung eines linearen Gleichungssystems von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten mit DERIVE:

Das Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen der Höhe auf a (#51 bzw. #52) und der Höhe auf c (#54 bzw. #55) ergibt folgendes lineares Gleichungssystem (#60)

$$4 + 0.525925\ \mu = -7 - 0.970427\ \tau$$
$$-3 - 0.565461\ \mu = -1 - 0.238213\ \tau$$
$$-3 - 0.635339\ \mu = 1 - 0.0390514\ \tau$$

Der **mathematische Teil des Problems** sollte, zumindest nach kurzer Auffrischung der Kenntnisse über lineare Gleichungssysteme (1. Jahrgang), von den Schülern selbst gelöst werden können, denn aufgrund des geometrischen Sachverhaltes hat das Gleichungssystem genau eine Lösung und aus der Komponentendarstellung (#60) ist ersichtlich, daß die ersten beiden Gleichungen keine proportionalen Koeffizienten für μ bzw. τ haben, das Gleichungssystem aus den beiden Gleichungen genau eine Lösung hat. Ob diese Lösung auch die dritte Gleichung erfüllt kann mit DERIVE leicht überprüft werden:

Nachdem durch #64 und #65 den Variablen μ und τ die Lösungswerte zugewiesen worden sind, liefert der Befehl approX #59 den Vektor
[0.440990 = 0.440986, 0.826556 = 0.826560, 1.29943 = 1.29943],
der im Rahmen der für approX eingestellten Genauigkeit gleiche Ergebnisse für die linken und rechten Seiten der Gleichungen liefert.

Es bleibt daher nur noch das Problem, aus der Komponentendarstellung des Gleichungssystems (#60) in DERIVE - ohne lästiges Abtippen von Zahlenwerten - eine mit dem Befehl soLve lösbare Form des aus zwei der drei Gleichungen gebildeteten linearen Gleichungssystems zu erstellen.

Das leistet die **Funktion ELEMENT(v,n), die die n-te Komponente des Vektors v liefert.** *Näheres kann in [1], Seite 136, "8.3 Das Zugreifen auf Elemente" nachgelesen werden.* Der Schnittpunkt der beiden Geradengleichungen #51 und #56 wird durch Einsetzen der Lösungswerte des Gleichungssystems #62 in diese Geradengleichungen gefunden.

Kommentierte Auflistung des Lösungsganges der gestellten Aufgabe mit Hilfe von DERIVE:

Lassen Sie sich von der Länge der Auflistung der Anweisungen, wie sie bei Einsatz von DERIVE am Bildschirm aufscheinen, nicht abschrecken, weil, um den Rechengang transparent und leichter lesbar erscheinen zu lassen, zusätzlich Kommentarzeilen ("...") und Befehle zur Berechnung von Zwischenwerten eingefügt worden sind, die zur Lösung der Aufgabe nicht unbedingt erforderlich wären.

```
Protokoll der Berechnung [2]                        erreicht über Menüpunkt
                                                    Kommentar
  1: "Vektorielle Dreiecksberechnungen"
  2: "geg.:A(4/-3/-3),B(2/4/4),C(-7/-1/1)"
  3: "ges.:a) Länge der Dreiecksseiten und b) die Innenwinkel"
  4: "     c) die Koordinaten des Höhenschnittpunktes"
  5: "     d) der Winkel, den der Vektor v=[0,-3,2] mit der"
  6: "        Normalen auf die Dreiecksebene einschließt"
  7: "Nützliche Funktionsdefinitionen:"
  8: "Winkel zwischen 2 Vektoren v1 und v2:"
  9: WINKEL(v1,v2):=ACOSFehler! 180/π                  Author
 10: "Normalvektor der Länge 1 auf die durch die Vektoren v1 und v2"
 11: "aufgespannte Ebene"
 12: NVEKTOR(v1,v2):=Fehler!                          Author
 13: "Eingabe der Ortsvektoren:"
 14: "Zu beachten: OPTIONS/INPUT/WORD setzen !"
 15: "Bei Wahl des Vorgabewertes Insensitive erscheinen Funktionen"
 16: "in Großbuchstaben und Variablen in Kleinbuchstaben"
 17: oa:=[ax,ay,az]                                   Author
 18: ob:=[bx,by,bz]                                   Author
 19: oc:=[cx,cy,cz]                                   Author
 20: "Spezielle Werte mit MANAGE/SUBSTITUTE einsetzen!"
 21: oa:=[4, -3, -3]                                  Manage/Substitute #17
                                                    Ersetzen von oa mit
                                                    Eingabetaste überspringen
 22: ob:=[2, 4, 4]                                    Manage/Substitute #18
                                                    ob überspringen
 23: oc:=[-7, -1, 1]                                  Manage/Substitute #19
                                                    oc überspringen
 24: "Dreieckseiten durch Vektoren darstellen"
 25: a:=oc - ob                                       Author
 26: [-9, -5, -3]                                     Simplify #25
 27: b:=oa - oc                                       Author
 28: [11, -2, -4]                                     Simplify #27
 29: c:=ob - oa                                       Author
 30: [-2, 7, 7]                                       Simplify #29
 31: "LÖSUNG a):Länge der Seiten durch ABS-Funktion"
 32: la:= |a|                                         Author ABS(a)
 33: 10.7238                                          approX #32
```

[2] Die folgenden Berechnungen finden Sie auf der Diskette unter dem Dateinamen SW_VEALB.MTH

```
 34: lb:= |b|                                        Author ABS(b)
 35: 11.8743                                         approX #34
 36: 10.0995                                         Author lc:=ABS(c)
                                              STRG+EINGABE-Taste
                                                    liefert sofort das Ergebnis
 37: "LÖSUNG b):Innenwinkel des Dreiecks mit vordef. Funktion WINKEL"
 38: α:= WINKEL(c, -b)                               Author
 39: 57.7464                                         approX #38
 40: β:= WINKEL(a, -c)                               Author
 41: 69.4600                                         approX #40
 42: "Γ bzw. gamma ist schon für die Gamma-Funktion in Verwendung,daher "
 43: w_gamma:= WINKEL(-a, b)                         Author
 44: 52.7935                                         approX #43
 45: α + β + w_gamma                                 Author
 46: 180                                             Simplify #45
 47: "Lösung c): Höhenschnittpunkt:"
 48: "Schritt 1:Geradengleichung für ha: x1:=oa+μ.na"
 49: na:= NVEKTOR(a, NVEKTOR(a, c))                  Author
 50: [0.525925, -0.565461, -0.635339]                approX #49
 51: x1:= oa + μ . na                                Author
 52: [4,-3,-3]+μ.[0.525925,-0.565461,-0.635339]      approX  #51
 53: "Schritt 2:Geradengleichung für hc: x2:=oc+τ.nc"
 54: nc:= NVEKTOR(c, NVEKTOR(a,c))                   Author
 55: [-0.970427, -0.238213, -0.0390514]              approX #54
 56: x2:= oc + τ . nc                                      Author
 57: [-7,-1,1]+τ.[-0.970427,-0.238213,-0.0390514]    approX #56
 58: "Nun die beiden Geraden schneiden ..."
 59: x1 = x2                                         Author
 60: [4,-3,-3]+μ.[0.525925,-0.565461,-0.635339]=~    approX #59
    ~[-7,-1,1]+τ.[-0.970427,-0.238213,-0.0390514]
         { ~ = Fortsetzung nur hier in der nächsten Zeile, Befehl wird in DERIVE
                                  fortlaufend geschrieben, ~ gehört nicht zum   Befehl ! }
 61:"Lösung des Gleichungssystems aus den beiden ersten Komponenten/SOLVE"
 62: [ELEMENT(oa,1)+μ ELEMENT(na,1)=~                Author
    ~ELEMENT(oc,1)+τ ELEMENT(nc,1),~
    ~ELEMENT(oa,2)+μ.ELEMENT(na,2)=~
... ~ELEMENT(oc,2)+τ.ELEMENT(nc,2)]
 63: [μ = -6.76714, τ = -7.66773]                    soLve #62
 64: μ:=-6.76714                                     Author kopiert aus #63
                                                     wie in [1] Seite 27
 65: τ:=-7.66773                                     Author kopiert aus #63
 66: "Berechnen des Ortsvektors oh zum Höhenschnittpunkt"
 67: oh:=oa + μ na                                   Author
 68: [0.440990, 0.826556, 1.29943]                   approX #67
 69: "Probe..."
 70: oh:=oc + τ nc                                   Author
 71: [0.440990, 0.826556, 1.29943]                   approX #70
 72: "Lösung d):Winkel zwischen Vektor v und Normaler auf Dreiecksebene"
 73: v:=[vx, vy,vz]                                  Author
 74: δ:= WINKEL(v, NVEKTOR(a, b))                    Author
 75: "Spezielle Werte für v mit MANAGE/SUBSTITUTE einsetzen"
 76: v:= [0, -3, 2]                                  Manage/Substitute #73
                                               Ersetzen von v mit
                                               Eingabetaste überspringen
 77: 15.1293                                         approX #74
 78: "Probe.."
 79: δ:= WINKEL(v, NVEKTOR(a, c))                    Author
 80: 164.870                                         approX #79
 81: "Fehler ?"            Richtungsabhängigkeit des Vektorproduktes !
 82: δ:= WINKEL(v, NVEKTOR(a, -c))                   Author
 83: 15.1293                                         approX #82
 84: "Variante der Berechnung des Höhenschnittpunktes ohne Verwendung"
 85: "des Vektorproduktes - die Berechnung verläuft analog zur"
 86: "vektoriellen Berechnung in der Ebene:"
```

```
 87: "Die Berechnung der Seiten und der Innenwinkel verläuft so wie oben"
 88:"der Klammerausdruck (lc COS(β rad)/la) ist die Länge der Strecke vom"
 89:"Eckpunkt A bis zum Fußpunkt der Höhe auf a."
 90: "Der Vektor na steht daher normal auf die Seite a."
             βπ
 91: β_rad:=----                                 Author
            180
 92: 1.2123                                      approX #91
 93: na:=c + a Fehler!                     Author
 94: [-4.97391, 5.34782, 6.00869]                approX #93
 95: nc:= -a - c Fehler!                   author
 96: [9.74509, 2.39215, 0.392156]                approX #95
 97: "Der weitere Rechengang verläuft wie oben - es wird nur"
 98: "µ durch ε und τ durch σ ersetzt:"
 99: x1:= oa + ε na                              Author
100: x2:= oc + σ nc                              Author
101: [ELEMENT(oa,1)+ε ELEMENT(na,1)=~            Author
    ~ELEMENT(oc,1)+σ ELEMENT(nc,1),~
    ~ELEMENT(oa,2)+ε.ELEMENT(na,2)=~
    ~ELEMENT(oc,2)+σ.ELEMENT(nc,2)]

102: [ε = 0.715535, σ = 0.763562]                      soLve #101
103: ε := 0.715535                               Author kopiert aus #102
104: σ := 0.763562                               Author kopiert aus #102
105: oh:= oa + ε na                              Author
106: [0.440990, 0.826556, 1.29943]               approX #105
107: oh:= oc + σ nc                              Author
108: [0.440986, 0.826560, 1.29943]               approX #107
```

3.Vergleich und Diskussion verschiedener Lösungswege, Folgerungen:

Der abschließende Vergleich und die Diskussion der verschiedenen Lösungswege soll zwei Ziele verfolgen:

Die einzelnen Arbeitsgruppen sollen das Gefühl erhalten, daß ihre Mühe gewürdigt und ihre Arbeit bewertet wird - muß nicht Benotung sein.

Die Lösungswege und -versuche der einzelnen Gruppen müssen "mathemat. aufgearbeitet" werden, d.h. offene Fragen klären, häufiger auftretende Fehler korrigieren aber auch durch weitere gezielte Fragen aus dem Gelernten Neues erarbeiten - hier die Vektordarstellung der Hesse-Normalform einer Ebene und ihre Anwendung.

Didaktische und methodische Anmerkungen:

Aus zeitlichen Gründen und auch um die Aufmerksamkeit der Schüler zu erhalten, ist davon abzuraten, daß alle Lösungswege der einzelnen Gruppen detailliert besprochen werden. Um aber die zuvor angeführten Ziele trotzdem anzustreben, empfiehlt sich folgende Vorgangsweise: Die Schüler kopieren mit dem Befehl **Transfer/Save/Derive** ihren Lösungsgang auf ihre Arbeitsdisketten. Der/die unterrichtende Lehrer(in) kann dann (nötigenfalls auch außerhalb des Unterrichtes) die einzelnen Lösungswege sichten, kopieren und dann im folgenden Unterricht zu den einzelnen Gruppenergebnissen Stellung nehmen, diese also verbal bewerten, bzw. die interessantesten Lösungswege von einem Gruppenmitglied der gesamten Klasse erläutern lassen. **Als Gerätekonfiguration reicht hier ein PC mit LCD-Overhead-Display und ein Overhead-Projektor aus.**

Hesse-Normalform und deren Anwendung:

Nach der Besprechung ist den Schülern bekannt, daß die DERIVE-Funktion **NVEKTOR(v_1,v_2)** (wobei v_1 und v_2 zwei nicht parallele Vektoren in der Dreiecksebene sind) einen Vektor $\vec{n}$=[nx,ny,nz] der Länge 1 liefert, der normal auf die Dreiecksebene und damit auf alle darin liegenden Vektoren steht, und daß aufgrund der Eigenschaften des Skalarproduktes gilt::

$$\vec{n}\,\vec{a} = 0,$$

$$\vec{n}\,\vec{b} = 0,\ \vec{n}(\vec{a}+\vec{b}) = 0,\ \vec{n}(\vec{b}+2\,\vec{c}) = 0\ldots$$

Dies kann in DERIVE mit den speziellen Daten der Aufgabenstellung sofort überprüft werden. Die Richtungsabhängigkeit des Normalvektors ist den Schülern ebenfalls aus den Berechnungen zur Teilaufgabe d) (#74,#79,#82) bekannt. Darauf aufbauend kann verallgemeinert werden: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{x}_0) = 0$, mit $\vec{x} = \vec{OP}$, $\vec{x}_0 = \vec{OP}_0$ wobei $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt und $P(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt in der Ebene ist. Durch Umformung erhält man die Gleichung $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{x}_0$, die verbal etwa so interpretiert werden kann: "Projiziert man den Ortsvektor $\vec{OP}$ vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt der Ebene auf die Richtung der Flächennormalen, so erhält man stets den gleichen Betrag, nämlich den Normalabstand des Ursprunges von der Ebene".

Einsetzen der Werte eines beliebigen Punktes liefert einen Wert ≠0.

Eine Betrachtung des Ausdrucks $\vec{n}\,\vec{x}-\vec{n}\,\vec{x}_0$ führt zur Interpretation des Wertes als Normalabstand des Punktes von der Ebene. Ersetzt man die Funktion NVEKTOR durch ihre auf dem Vektorprodukt basierende Definition (#12), so erhält man eine von DERIVE-Notationen unabhängige Form der Gleichung der Ebene:

$$\frac{(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|} = 0,\text{mit } \vec{x}_0 = \vec{OP}_0,\ \vec{x} = \vec{OP}$$

wobei $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ "die Ebene aufspannen".

Protokoll der Berechnung	erreicht über Menüpunkt *Kommentar*
109: "n=[nx,ny,nz] ...Normalvektor auf die Dreiecksebene"	
110: n:=NVEKTOR(a, b)	Author
111: "OPTION/PRECISION/EXACT einstellen!"	*um exakt 0 zu erhalten*
112: $\left[\frac{7\sqrt{10286}}{5143}, -\frac{69\sqrt{10286}}{10286}, \frac{73\sqrt{10286}}{10286}\right]$	Simplify #110
113: n . a	Author
114: 0	Simplify #113
115: "approX liefert Ergebnisse mit beschränkter Genauigkeit"	
116: [0.138039, -0.680342, 0.719780]	approX #112
117: $-1.33854\ 10^{-8}$	approX #113
118: n . b	Author
119: 0	Simplify #118
120: n . (a + b)	Author
121: 0	Simplify #120
122: n . (a + 2 c)	Author
123: 0	Simplify #122
124: "Hesse-Normalform der Dreiecksebene"	
125: x:=[xx, xy, xz]	Author
126: x0:= oa	Author
127: n . (x - x0)	Author
128: "Überprüfen ob Koordinaten von B die Gleichung erfüllen"	
129: x:= ob	Author
130: 0	Simplify #127
131: "ebenso C..."	
132: x:= oc	Author
133: 0	Simplify #127
134: "Normalabstand des Ursprungs..."	
135: n . x0	Author
136: 0.433839	approX #135
137: "Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Punktes"	
138: x:=[2, -3, 5]	Author
139: 5.48215	approX #127

4..Literaturhinweise:

[1] Handbuch DERIVE, Version 2, Soft Warehouse, Inc. Honolulu, Hawaii, Deutsche Übersetzung von Soft Warehouse GmbH Europe, Schloß Hagenberg, Österreich, Vierte Ausgabe, dritte Auflage:November 1990

[2] J. Schärf, MATHEMATIK, Band 4, vierte, neubearb. Aufl., Oldenbourg Verlag Wien 1989

[3] Schalk, Mathematik 4, 2., erweiterte Auflage, Reniets Verlag Wien 1992

[4] J. Schärf, MATHEMATIK, Band 2, siebente, verbesserte. Aufl., Oldenbourg Verlag Wien 1987

[5] Schalk, Mathematik 2, Reniets Verlag Wien 1987 □