Die Penrose Parkettierung

Aus Mathematica in Action von Stan Wagon Seite 119 ff

Michael Kugler

Die Ebene mit regelmäßigen Vielecke (Fliesen) zu pflastern, ist sowohl von mathematischer Seite als auch von ästhetische Seite ein jahrhundertealtes Problem.

Üblicherweise stellt man sich unter der Parkettierung eine regelmäßiges, sich wiederholendes, wie auch immer periodisches oder symmetrisches Muster vor.

(Man bringe sich nur die Bilder von M. C. Escher ins Gedächtnis.)

Man bezeichnet eine Menge (im mathematischen Sinn) von Fliesen als aperiodisch, wenn sie die ganze Ebene ohne Überschneidung bedekken, es aber keine Anordnung der Fliesen gibt, in der eine Translationssymmetrie in mindestens 2 nichtparalleler Richtungen zu finden ist. (Mit anderen Worten: wie immer man die Fliesen auch legt, durch Verschieben läßt sich keine Deckung mit anderen Fliesen in der ganzen Ebene finden).

Im Jahr 1961 vermutete H. Wang: Wenn man eine Ebene mit einer Menge von Fliesen parkettieren kann, so kann man immer eine derartige Translationssymmetrie finden.

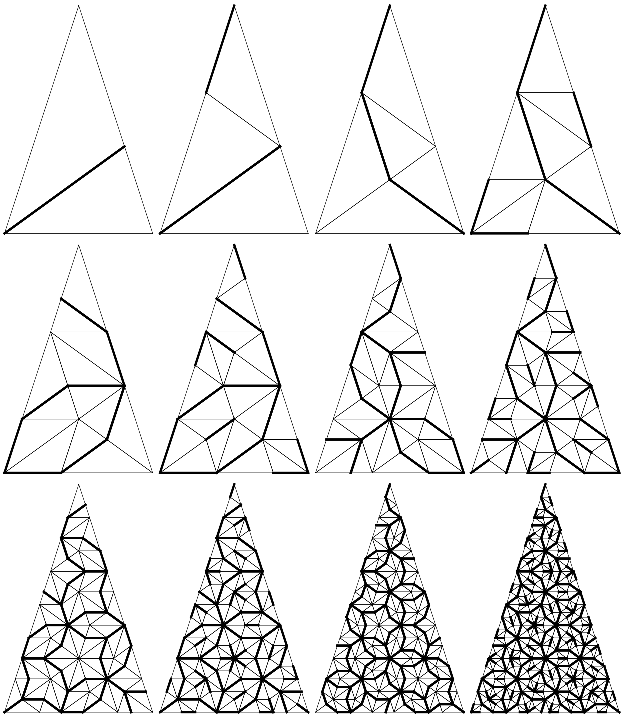
1966 widerlegte R. Berger diese Vermutung:Es exitiert eine aperiodische Menge von 20426 Fliesen. Diese Zahl reduzierte sich schnell, 1971 enthielt die kleinste aperiodische Menge nur noch 6 Fliesen.

1974 fand Roger Penrose überraschenderweise zwei einfache Vierseiter, die „Drachen“ und die „Pfeile“, die eine aperiodische Menge bilden. (Ob es ein Vieleck gibt, das eine aperiodische Parkettierung der Ebene erlaubt, ist noch eine offen Frage).

Mit diesen "Drachen" und "Pfeilen" will ich mich nun beschäftigen. Das folgende Mathematica Programm beschreibt den Teilungsprozess des Startdreieckes.

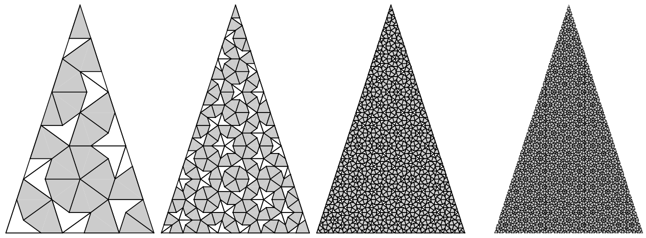
Mit dem Befehl `dreiecksunterteilung[Range[10]];` werden die ersten 10 Teilungsprozesse gezeigt. Die dunkel einfärbte Seite des Dreieckes dient zur Markierung in welcher Art die Teilung zu erfolgen hat.

```
phi=GoldenRatio//N;

obererPunkt = {1/2, Sin [72Degree] phi}//N;

startdreieck = {obererPunkt,{1,0.},{0.,0.},1};

unterteile[{p_,q_,r_,1}]:=
       (neuerPunkt =(phi q +p) * (2-phi);
       {{r,neuerPunkt,q,1},{r, neuerPunkt,p,-1}})

unterteile[{p_,q_,r_,-1}]:=
       (neuerPunkt =(phi r +p) * (2-phi);
       {{r,neuerPunkt,q,-1},{p,q,neuerPunkt,1}})

unterteile[list_] :=(type *= -1;
       Select[list, Last[#] != type &]
              ~Join~
       Flatten[Map[unterteile, Select[list,
              Last[#] ==type &]],1] /;
                     TensorRank[list] !=1)

dreiecksunterteilung[n_]:= (type =1;
    kacheln = Nest[unterteile, startdreieck, n]/.
           {p_,q_,r_,x_}->{Line[{q,r,p}],
                            Thickness[.015],Line[{p,q}]};
    Show[Graphics[{Thickness[.0005],kacheln}],
         AspectRatio->obererPunkt[[2]],
         PlotRange->All])

Attributes[dreiecksunterteilung] = Listable;

dreiecksunterteilung[Range[12]];
```



Nach dieser Unterteilung des Rechteckes werden nun die Dreiecke in geeigneter Weise zu Vierecken verknüpft. Dabei entstehen die „Drachen“ und die „Pfeile“. Dieses Drachen und Pfeile bilden nun eine aperiodische Menge. Das folgende Programmsegment erzeugt die „Drachen“ und „Pfeile“ und färbt die „Drachen“ grau ein.

```
drachenundPfeile[n_] := (typ =1;
       kacheln = Nest[unterteile, startdreieck,2n]/.
         {{p_,q_,r_,-1}->Line[{q,r,p}],
          {p_,q_,r_, 1}->{GrayLevel[0.8], Polygon[{q,r,p}],
                          GrayLevel[0],Line[{q,r,p}]}};
       Show[Graphics[{Thickness[0.005],
{kacheln,Line[{obererPunkt,{1,0},{0,0},obererPunkt}]}}],
             AspectRatio->obererPunkt[[2]],
             PlotRange->All])

drachenundPfeile[4]; drachenundPfeile[6]; drachenundPfeile[8];
```



Zum Abschluß noch ein Bild der 9. Generation (rechts). Neben einer ausführlichen Beschreibung dieser Parkettierung finden sich in diesem Buch noch weitere interessante Gebiete. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien nur einige beispielhaft erwähnt. Iterative komplexe Graphiken, mathematische und botanische Bäume, Algorithmen aus der Zahlentheorie (Kettenbrüche, ägyptische Brüche..), imaginäre Primzahlen ... ☐